Funktion: Grundbegriffe **A 8_01**

Eine **Funktion** ist eine **eindeutige Zuordnung**:
Jedem Wert aus der **Definitionsmenge** wird genau ein Wert aus der **Wertemenge** zugeordnet.

Ist f eine Funktion und sind x und y einander zugeordnete Werte, dann schreibt man kurz:

f: x→y für die **Zuordnungsvorschrift**,
f(x) für den **Funktionsterm**,
y=f(x) für die **Funktionsgleichung**,
D_f und **W_f** für die **Definitions- und Wertemenge**.

Bsp.: Betragsfunktion

Zuordnungsvorschrift: x→ |x|
Funktionsterm: f(x)=|x|
Funktionsgleichung: y=|x|
Definitionsmenge: $D_f=Q$
Wertemenge: $W_f=Q_0^+$

Veranschaulichung von Funktionen **A 8_02**

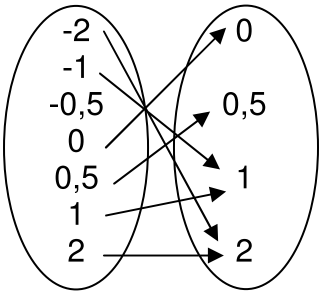
Funktionen können durch **Wertetabellen**, **Pfeildiagramme** und Funktionsgraphen veranschaulicht werden. Der Funktionsgraph besteht aus den Punkten (x|y) aller Wertepaare der Funktion.

Beispiel: f: x→ y=|x|

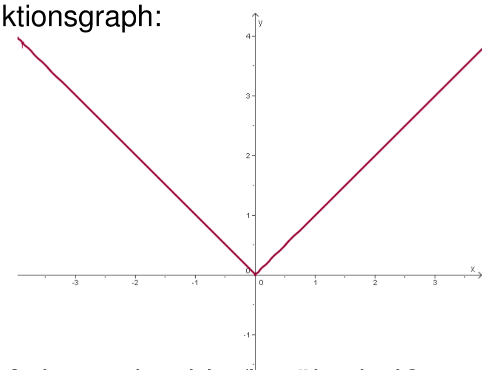
Wertetabelle:

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
y	2	1	0,5	0	0,5	1	2

Pfeildiagramm:



Funktionsgraph:



Die Stellen x, an der der Graph von f, die x-Achse schneidet/berührt heißen **Nullstellen** von f. Der y-Wert ist an diesen Stellen Null.

Lineare Funktion **A 8_03**

Die Funktion f: x→ mx+t heißt **lineare Funktion** für alle m,t ϵ Q.
Wenn nicht anders angegeben ist die Definitionsmenge Q.

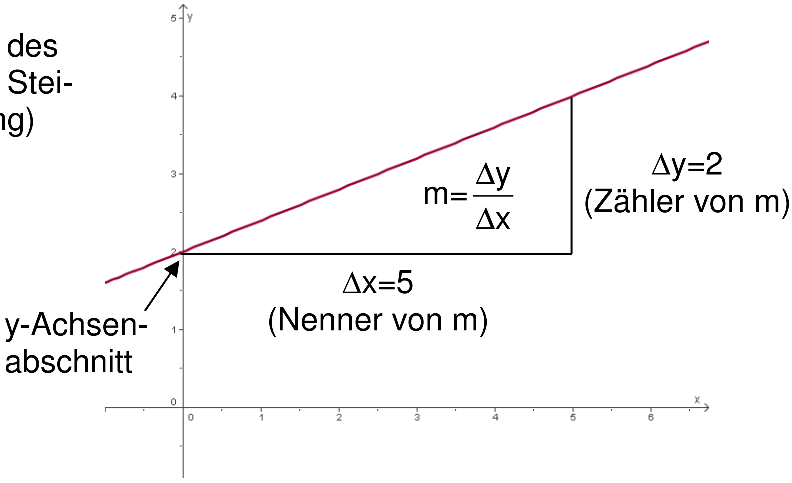
Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade** oder bei eingeschränkter Definitionsmenge ein Teil davon.
Die Gerade hat die **Steigung m** und schneidet die y-Achse an der Stelle y=t.
Man nennt t daher auch den **y-Achsenabschnitt**.
Die Gerade steigt, falls m>0 und fällt, falls m<0.

Der Graph lässt sich mithilfe des y-Achsenabschnitts und des Steigungsdreiecks (vgl. Abbildung) zeichnen.

Beispiel:

f: x→ $\frac{2}{5}$x+2

also m=$\frac{2}{5}$ und t=2



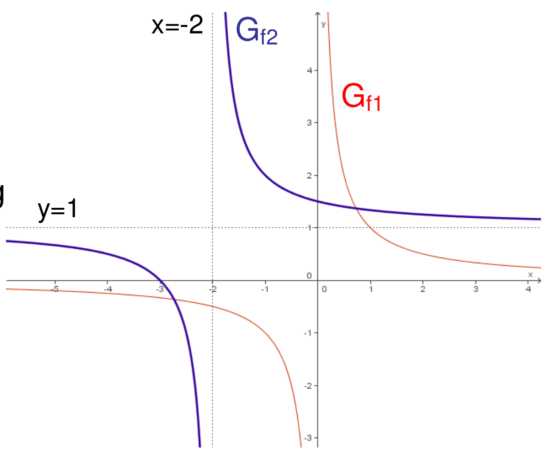
Gebrochen-rationale Funktionen **A 8_04**

Funktionen, die im Nenner des Funktionsterms die unabhängige Variable x enthalten, heißen **gebrochen-rationale Funktionen**.

Einfache Beispiele sind Funktionen der Form $f: x \rightarrow \frac{\pm 1}{x-a} + b$.

z.B. : $f_1: x \rightarrow \frac{1}{x}$ oder $f_2: x \rightarrow \frac{1}{x+2} + 1$

Für x=a sind diese Funktionen nicht definiert.
Ihr Graphen heißen **Hyperbeln** und besitzen an der Definitionslücke eine **Polstelle**.
Die Geraden x=a und y=b sind **Asymptoten** des Graphen.
Die Graphen von f gehen durch Verschiebung und evtl. Spiegelung an der x-Achse aus dem Graphen von f_1 hervor.



Beispiel f_2 :
Definitionslücke und Polstelle bei x=-2 ;
Asymptoten : x=-2 und y=1 ;
Der Graph von f_2 geht aus dem Graphen von f_1 durch Verschiebung um 2LE in negative x-Richtung und um 1 LE in positive y-Richtung hervor.

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten — A 8_05

Lineare Gleichungssysteme bestehen im Allgemeinen aus mehreren linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten.
Lösungen von linearen Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten sind Zahlenpaare, die beim Einsetzen beide Gleichungen erfüllen:

Beispiel:

(I) $2x + 3y = 4$
(II) $2x - 2y = -1$

Mögliche Lösung: $(x ; y) = (0{,}5 ; 1)$

Probe: (I) $2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 1 = 4$
(II) $2 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 1 = -1$

Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme — A 8_06

Gleichsetzungsverfahren

Beide Gleichungen werden nach derselben Variablen aufgelöst und gleichgesetzt. Dadurch entsteht **eine** Gleichung mit **einer** Unbekannten.

(I) $x + 3y = 4 \Leftrightarrow x = 4 - 3y$ (I´)
(II) $2x - 2y = -1 \Leftrightarrow x = y - 0{,}5$ (II´)

(I´)=(II´) : $4 - 3y = y - 0{,}5$
$\Leftrightarrow 4{,}5 = 4y$
$\Leftrightarrow \underline{1{,}125 = y}$

Die Lösung für die zweite Variable erhält man durch Einsetzen der bereits berechneten Lösung in eine der Ausgangsgleichungen:
y in (II´): $\underline{x = 1{,}125 - 0{,}5 = 0{,}625}$

Additionsverfahren

Beim Additionsverfahren werden Vielfache der Ausgangsgleichungen so addiert bzw. subtrahiert, dass wieder **eine** Gleichung mit **einer** Unbekannten entsteht.

(I) $x + 3y = 4$
(II) $2x - 2y = -1$

2·(I)-(II) : $2x + 6y - 2x + 2y = 8 + 1$
$\Leftrightarrow 8y = 9$
$\Leftrightarrow \underline{y = 1{,}125}$

y in (I): $x + 3{,}375 = 4$
$\Leftrightarrow \underline{x = 0{,}625}$

Einsetzverfahren

Eine der beiden Gleichungen wird nach einer Variablen aufgelöst und in die andere Gleichung eingesetzt:

(I) $x + 3y = 4 \Leftrightarrow x = 4 - 3y$ (I´)
(II) $2x - 2y = -1$

(I´) in (II) : $2(4 - 3y) - 2y = -1$
$\Leftrightarrow 8 - 6y - 2y = -1$
$\Leftrightarrow -8y = -9$
$\Leftrightarrow \underline{y = 1{,}125}$

y in (I´): $\underline{x = 4 - 3 \cdot 1{,}125 = 0{,}625}$

Bruchterme und Bruchgleichungen — A 8_07

Bei einem **Bruchterm** und bei einer **Bruchgleichung** kommt die Variable im Nenner vor. Aus deren Definitionsmenge sind alle Zahlen auszuschließen, für die der Nenner Null würde. Um eine Bruchgleichung zu lösen, ist eine dazu äquivalente Gleichung zu suchen, die die Variable nicht mehr im Nenner enthält. Dabei können alle dir bekannten Gesetze des Bruchrechnens und des äquivalenten Umformens von Termen und Gleichungen angewandt werden.

Beispiel:

Berechnung der Nullstelle von f_2 (vgl. A 8_02 und A 8_04):

$$\frac{1}{x+2}+1=0$$

$$\frac{1}{x+2}+\frac{x+2}{x+2}=0$$

$$\frac{1+x+2}{x+2}=0$$

Probe: $g(-3)=\frac{1}{-3+2}+1=-1+1=0$

$$1+x+2=0$$

$$x=-3$$

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten — A 8_08

Für $a\in Q\setminus\{0\}$ und $n\in Z$ gilt: $a^0=1$ und $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

Rechengesetze für Potenzen ($a,b\in Q\setminus\{0\}$ und $m,n\in Z$ **)**

Potenzen mit gleicher Basis:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n} \qquad a^m:a^n=a^{m-n} \qquad \left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$$

Potenzen mit gleichem Exponenten:

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \qquad a^n:b^n=(a:b)^n$$

Beispiele:

$$27^0=1 \qquad 4^{-3}=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$$

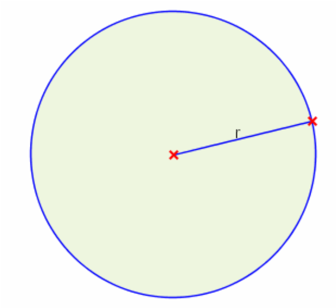
$$5^2\cdot 5^3=5^{2+3}=5^5 \qquad 3^7:3^{-2}=3^{7-(-2)}=3^9 \qquad \left(6^2\right)^3=6^{2\cdot 3}=6^6$$

$$2^4\cdot 0{,}5^4=(2\cdot 0{,}5)^4=1^4=1$$

$$6^{-4}:2^{-4}=(6:2)^{-4}=3^{-4}$$

Umfang und Flächeninhalt des Kreises **G 8_01**

Umfang U und Flächeninhalt A eines Kreises hängen von dessen Radius r bzw. Durchmesser $d = \frac{r}{2}$ ab:



I. $\boxed{U = 2 \cdot \pi \cdot r \text{ bzw. } U = 2 \cdot \pi \cdot \frac{d}{2} = \pi \cdot d}$

Kreizahl π =3,14159265…; meist reicht die Näherung $\pi \approx 3{,}14$

Verdoppelt man den Radius eines Kreises, so verdoppelt man auch dessen Umfang, denn für $r_{neu} = 2 \cdot r$ ist

$U_{neu} = 2 \cdot \pi \cdot r_{neu} = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot r = 2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) = 2 \cdot U$.

II. $\boxed{A = \pi \cdot r^2 \text{ bzw. } A = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2}$.

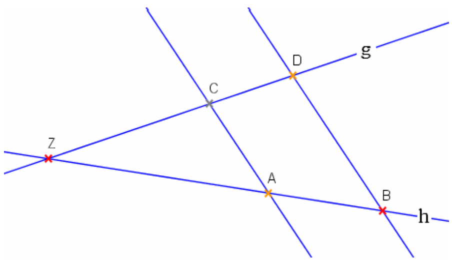
Halbiert man den Radius eines Kreises, so hat der neue Kreis ein Viertel der Fläche des ursprünglichen Kreises, denn für $r_{neu} = \frac{r}{2}$ ist $A_{neu} = \pi \cdot r_{neu}{}^2 = \pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{r^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{4} \cdot A$.

Bsp.: $r = 6mm \Rightarrow$ $U = 2 \cdot \pi \cdot 6mm = 37{,}7mm$

$A = \pi \cdot (6mm)^2 = \pi \cdot 36mm^2 \approx 113{,}1mm^2$

Strahlensatz und Ähnlichkeit **G 8_02**

Werden zwei sich in Z schneidende Geraden (g und h) von zwei parallelen Geraden (AC und BD), die nicht durch Z verlaufen, geschnitten, so gilt:



1. Je zwei Abschnitte auf g verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf h , d.h.

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}} \text{ oder } \frac{\overline{ZA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{CD}}.$$

2. Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die Entfernungen ihrer Endpunkte von Z auf g oder h , d.h.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}}$$

Zueinander **ähnliche Dreiecke** stimmen in allen entsprechenden Winkeln und Seitenverhältnissen überein. Die Ähnlichkeit zweier Dreiecke lässt sich anhand von Ähnlichkeitssätzen prüfen.
In der obenstehenden Figur sind die Dreiecke ZAC und ZBD ähnlich.

Zufall und Wahrscheinlichkeit

W 8_01

Versuchsausgänge von Zufallsexperimenten heißen **Ergebnisse** ω.
Werden alle Ergebnisse zu einer Menge zusammengefasst, erhält man den **Ergebnisraum** Ω**.**
Teile des Ergebnisraumes **(Teilmengen)** bilden **Ereignisse.**
Ein **Elementarereignis** enthält nur ein Element.

Zufallsexperimente mit gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen heißen **Laplace- Experimente** .
Bei Laplace Experimenten kann die Wahrscheinlichkeit P(E) für ein Ereignis E berechnet werden.

$$\boxed{P(E) = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } E}{\text{Anzahl der Elemente von } \Omega}}$$

Beispiel:
Beim Werfen eines Spielwürfels sind die möglichen **Ergebnisse**, die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Elemente des **Ergebnisraums** $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
Ein Ereignis ist z.B. „Gerade Augenzahl“ $G = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$. Es ist $G \subset \Omega$.
Die Elementarereignisse $\{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 3 \}, \{ 4 \}, \{ 5 \}, \{ 6 \}$ haben alle die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Es kann z. B. berechnet werden : P(„Gerade Augenzahl“) $= \frac{3}{6} = 50\,\%$.